# 第二章 流體靜力學

國立中央大學土木系
朱佳仁 教授





## 本章重點





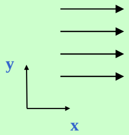


- 流體靜力學(Hydrostatics)研究流體在靜止狀態下所發生的現象，與其相關的力學行為。而靜止狀態是指流體之間無相對運動，亦即速度梯度為零。

$$\frac{du}{dy} = 0$$

$$\tau = 0$$

u(y)= const.



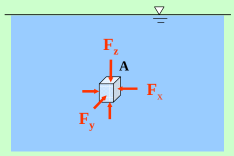


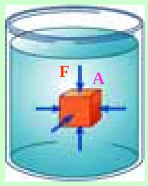



## 2.1 靜壓力

靜止狀態下，流體僅受本身重量所產生的靜壓力(Hydrostatic pressure)作用。壓力(Pressure)的定義單位面積所受之正向力，又稱為壓應力：

$$P = \frac{F}{A}$$

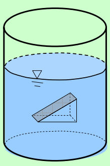


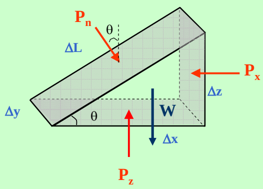








在靜止流體中，一塊楔形的流體，寬度Δy，長度為 $\Delta x = \Delta L\cos\theta$ ，高度$\Delta z = \Delta L\sin\theta$。 $P_n$為垂直於斜面上的壓力，$P_x$、$P_z$分別為水平及垂直方向上的壓力。






流體本身的重量為： $W = \frac{1}{2}(\Delta x \Delta y \Delta z)\cdot\gamma$





## 靜壓力之力平衡

因為流體在靜止狀態下，故其所受之總力為零：

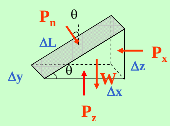
x方向： $(P_n \Delta L \Delta y)\sin\theta - P_x \Delta y \Delta z = 0$

z方向： $P_z \Delta x \Delta y - (P_n \Delta L \Delta y)\cos\theta - W = 0$

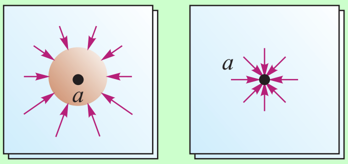
長度為$\Delta x = \Delta L\cos\theta$ ，高度$\Delta z = \Delta L\sin\theta$。

可推導得：

$$P_n = P_x = P_z$$




在靜止流體中，在某一點的靜壓力各個方向皆相等。



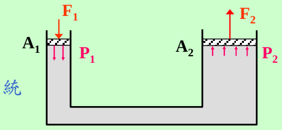

考慮一靜止流體中以 $a$ 為球心的小球面，此球面各點所受的力，均與球面正交，且通過球心(否則此塊流體會移動或轉動)。今將小球縮小至一點(即球面縮至$a$點)，重力趨近於零，則作用於 $a$ 點的壓力，必定大小相等、方向相反地作用在 $a$ 點上。換言之，在靜止流體中任意點所受的壓力是各方向都相等的。





## 帕斯卡定律(Pascal's law)

對密閉容器中的液體施加壓力，壓力會傳遞到容器中其他位置，且不論任何方向之壓力，其大小皆相等。國際單位制的壓力單位便是用帕斯卡的名字命名。



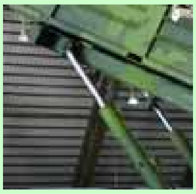

Blaise Pascal
1623-1662

$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$





## 帕斯卡定律(Pascal's law)

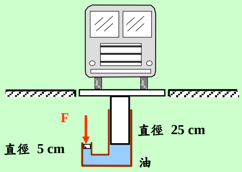



$$P_1 = P_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$





例題：若想用油壓千斤頂舉起一輛重5000 kg的車子，需在千斤頂的另一端施多大的力？




解：依據帕斯卡定律：

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\pi(0.05)^2/4} = \frac{5000 \cdot 9.81}{\pi(0.25)^2/4}$$

可得F = 1962 N，需施外力1962 N才能舉起此輛車子





## 相對壓力與絕對壓力

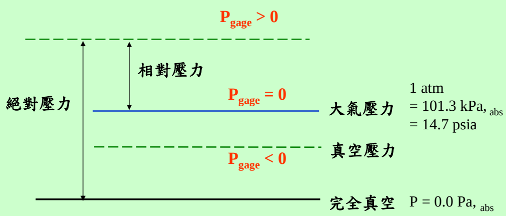
1.絕對壓力(Absolute Pressure)：以完全真空之壓力為零點，氣象資料中之氣壓和流體的蒸氣壓即以絕對壓力表示。國際單位制中，壓力的單位多以Pa, abs 表示，英制則用psia。

2.相對壓力(Relative Pressure)：以地表處之大氣壓力為零點，一般的壓力計(Pressure gage)大多是以這種方式來顯示壓力，故相對壓力又稱為錶壓力(Gage pressure)。國際單位制用Pa, gage，英制表示為psig。



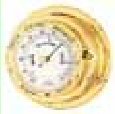


## 相對壓力之示意圖




相對壓力可正可負，但絕對壓力不可能為負壓。

例題：一壓力計A顯示一密閉容器之壓力為 50 kPa，其絕對壓力為何？



解：一標準大氣壓力$P_{atm}$ = 101.3 kPa

故絕對壓力 $P_A = P_{A,gage} + P_{atm}$

$= 50\ \text{kPa} + 101.3\ \text{kPa}$

$= 151.3\ \text{kPa}_{,abs}$

相對壓力有可能為負壓。

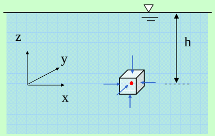
颱風中心的壓力便低於標準大氣壓，相對壓力為負值

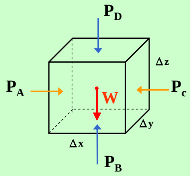
譬如颱風中心的壓力為980 mb$_{,abs}$ = - 33 mb, $_{gage}$





## 2.2 壓力隨高程的變化




- 流體 x 方向之總力為零：

$$P_A \cdot \Delta y \cdot \Delta z - P_c \cdot \Delta y \cdot \Delta z = 0$$

亦即$P_A = P_c$，同理y方向之壓力亦會相等

換言之，水平方向之壓力皆相同。



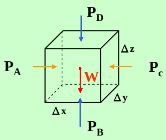


垂直z方向之總力：

$$P_B \cdot \Delta x \cdot \Delta y - P_D \cdot \Delta x \cdot \Delta y - W = 0$$

式中 W=γΔx·Δy·Δz 為流體之重量，γ 為單位重。

整理可得 $P_B - P_D - \gamma \Delta z = 0$




利用泰勒展開式(Taylor's expansion):

$$P(z+\Delta z) = P(z) + \Delta z \frac{dP}{dz} + \frac{(\Delta z)^2}{2}\frac{d^2P}{dz^2} + \ldots + \frac{(\Delta z)^n}{n!}\frac{d^nP}{dz^n}$$

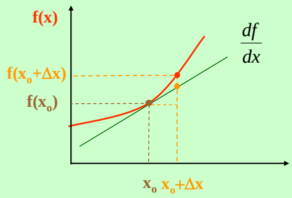
式中P(z)為水深z處(流體中心)之壓力，P(z+Δz)為水深z+Δz 處之壓力。





## 泰勒展開式(Taylor's expansion)

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{d^2f}{dx^2} + \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}$$



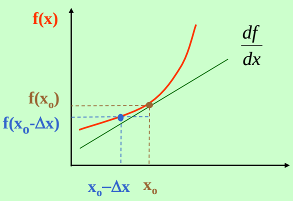

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + \Delta x \frac{df}{dx}$$





## 泰勒展開式(Taylor's expansion)

$$f(x_o - \Delta x) = f(x_o) - \Delta x \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2} + \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}$$




$$f(x_o - \Delta x) \approx f(x_o) - \Delta x \frac{df}{dx}$$





- 當距離Δz很小時，高階項可忽略，因此

$$P(z+\Delta z) \approx P(z) + \Delta z \frac{dP}{dz}$$

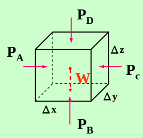
不同位置之壓力會因壓力梯度dp/dz而有些微的改變。

- 故D點的壓力為 $P_D = P(z + \frac{\Delta z}{2}) = P(z) + \frac{\Delta z}{2}\frac{dP}{dz}$

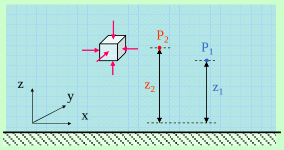
- B點的壓力為 $P_B = P(z - \frac{\Delta z}{2}) = P(z) - \frac{\Delta z}{2}\frac{dP}{dz}$

代入垂向壓力方程式：

$$P_B - P_D - \gamma \Delta z = 0$$



13:49 C.R. Chu




整理可得**靜壓方程式(Hydrostatic eqn.)**：

$$\boxed{\frac{dP}{dz}=-\gamma}\qquad \frac{dP}{dz}=\frac{P_2-P_1}{z_2-z_1}<0 \qquad P_2<P_1$$

此式描述垂向壓力梯度（壓力隨著高程的改變）與流體單位重之間的關係，方程式中負號代表隨著高度的增加，壓力會遞減。

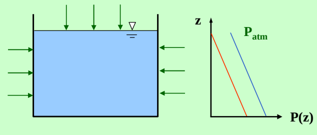
2 - 19

13:49 C.R. Chu

流體可分為 { 均質流體(Uniform density fluid)；非均質流體(Non-Uniform density fluid)

- 均質流體(Homogeneous fluid):流體的密度不會隨著位置而變，亦即流體的密度及單位重為常數。

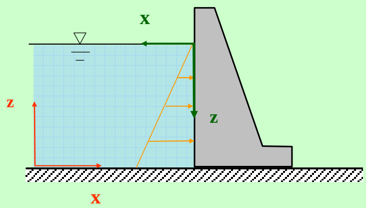
靜壓方程式：$\frac{dP}{dz}=-\gamma$




壓力會隨著高度成線性變化

2 - 20

13:49 C.R. Chu




$$\frac{dP}{dz}=-\gamma \qquad\qquad \frac{dP}{dx}=\gamma$$

2 - 21

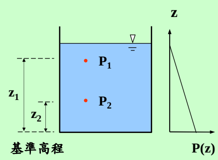
13:49 C.R. Chu

靜壓方程式：$\frac{dP}{dz}=-\gamma$

一個裝滿水之水箱，若以水箱底部為基準高程，$P_1$及$P_2$分別為水深$z_1$及$z_2$處之靜壓力。

可將靜壓力方程式積分：

$$\int_{P_1}^{P_2} dP=-\int_{z_1}^{z_2}\gamma dz$$




因為水的單位重為常數：

$$P_2-P_1=-\gamma(z_2-z_1)$$

可得均質流體之靜壓力方程式：

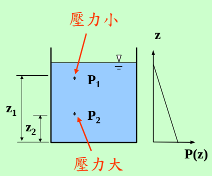
$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+z_2=\text{定值}}$$

2 - 22

13:49 C.R. Chu

均質流體之靜壓方程式

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+z_2=\text{定值}$$




$\frac{P}{\gamma}+z$ ：靜壓水頭(Piezometric head)

$\frac{P}{\gamma}$ ：壓力水頭(Pressure head)

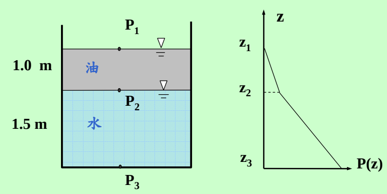
z ：高程水頭(Elevation head)

以上水頭(head)的因次皆為[L]。

2 - 23

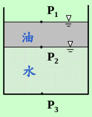
13:49 C.R. Chu

**例題**：水箱中裝有兩層流體，上層為油，比重為0.85，深度為1.0 m；下層為水，水深為1.5 m。水箱的半徑為0.8 m。問水箱底部之壓力及總力？




2 - 24

**解：** 上層流體 $\frac{P_1}{\gamma_{oil}}+z_1=\frac{P_2}{\gamma_{oil}}+z_2$




油面之壓力為大氣壓力 $P_1 = P_{atm} = 0$ Pa, gage

故油水界面處之壓力 $P_2 = P_1 + (z_1 - z_2) \times \gamma_{oil}$

$P_2 = 1.0 \times (0.85 \times 9810) = 8.34 \times 10^3$ N/m$^2$= 8.34 kPa, gage

下層流體： $\frac{P_2}{\gamma_w}+z_2=\frac{P_3}{\gamma_w}+z_3$

水箱底部之壓力 $P_3 = P_2 + (z_2 - z_3) \cdot \gamma_w$

$= 8.34 \times 10^3 + (1.5 \times 9810) = 23.05$ kPa, gage

因水箱外部亦承受大氣壓力，故靜壓總力僅需以相對壓力計算。水箱底部所受之總力：

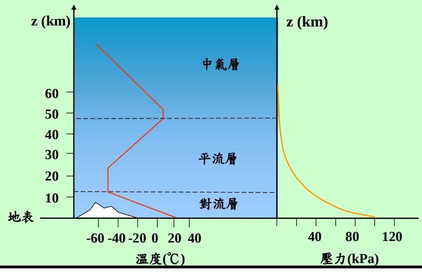
$$F = P \times A = 23.05 \times \pi (0.8)^2 = 46.3 \ \text{kN}$$





## 2.2.2 非均質流體

當流體的密度會隨著位置而改變，可稱為非均質流體，譬如大氣中空氣的密度會因為溫度的緣故隨著高度而有顯著的變化。在此狀況下，壓力的計算便需要考慮氣體密度的函數。








- 依據氣體的狀態方程式：

$$\gamma = \rho g = \frac{P}{RT} g$$

式中T為氣溫，R=287 J/kg/°K為空氣的氣體常數。

代入靜壓力方程式

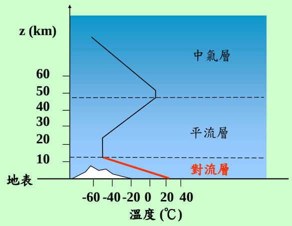
$$\frac{dP}{dz} = -\gamma = -\frac{Pg}{RT}$$

亦即大氣層中壓力梯度為壓力與溫度的函數。

- 大氣層(Atmosphere)依其特性可分成幾層，在最靠近地球表面的大氣層稱為對流層(Tropsphere)，對流層的厚度大約為10 ~ 12公里。
- 在對流層之上的平流層(Stratosphere)，高度約自對流層頂至高度50公里左右　。








- 對流層內氣溫會隨高度增高而下降，平均每增高1公里，約降低攝氏 6.5度：

$$T = T_o - \alpha(z - z_o)$$

式中$z_o$為基準高程的高度(一般以海平面做為基準高程$z_o$ = 0)，$T_0$為基準高程的溫度，α = 6.5 °K/km 為對流層中的降溫率(lapse rate)。





- 在對流層之中，壓力的改變與溫度的變化有關：

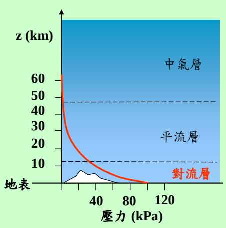
$$\frac{dP}{P} = -\rho g = -\frac{g}{RT}dz = -\frac{g}{R[T_o - \alpha(z - z_o)]}dz$$

- 積分可得

$$\int_{P_o}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R}\int_{z_o}^{z}\frac{dz}{[T_o - \alpha(z - z_o)]}$$

$$P = P_o\left[1 - \frac{\alpha(z - z_o)}{T_o}\right]^{g/\alpha R}$$

亦即大氣壓力會隨高度的增加而非線性地遞減。








**例題：** 若海平面（$z_o = 0$）之氣溫為$T_o = 20$ °C，大氣壓力$P_o = 1$ atm。試問聖母峰頂（高度 8848 m）處的大氣壓力及空氣密度為何？

THE SUMMIT OF MOUNT EVEREST

**解：** 海平面溫度T = 20 °C = 20 + 273.15 = 293.15 °K

聖母峰頂之溫度

T = 20 – 6.5 (8.848) = -37.5 °C = 235.65 °K

代入空氣的氣體常數R = 287 J/kg/ºK，可得指數

$$\frac{g}{\alpha R}=\frac{9.81\,m/s^2}{6.5^o K/km\cdot 287\,J/kg^o K}=5.259$$

代入可得大氣壓力

$$P=P_o\left[1-\frac{\alpha(z-z_o)}{T_o}\right]^{g/\alpha R}=1.0\,atm\left[1-\frac{6.5\cdot 8.848}{293.16}\right]^{5.259}=0.317atm$$

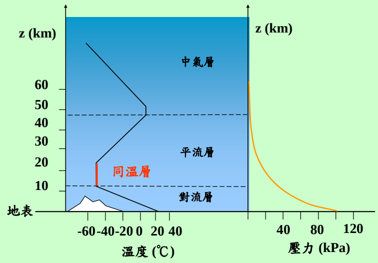
而空氣密度 $\rho=\frac{P}{RT}=0.475\ \text{kg/m}^3$

亦即空氣密度僅為海平面空氣密度的39 %，空氣的密度較海平面稀薄許多。





自對流層頂至高約30餘公里處屬平流層下部，氣溫幾乎恆定不變，約為-56 ºC左右，且氣流平穩，此層大氣又稱為同溫層。 30餘公里以上，溫度反隨高度而增，平均每升高1公里，溫度約增加攝氏5 ºC，至平流層頂溫度達最高峰。








**靜壓力方程式**

$$\frac{dP}{dz}=-\gamma=-\frac{Pg}{RT}$$

**積分可得同溫層內的氣壓變化：**

$$\int_{P_1}^{P}\frac{dP}{P}=-\int_{z_1}^{z}\frac{g}{RT}dz$$

$$\ln P-\ln P_1=-\frac{g}{RT}(z-z_1)$$

$$P=P_1\exp\left[-\frac{g}{RT}(z-z_1)\right]$$

**式中$z_1$為平流層底部（對流層頂）之高度，$P_1$為該處之大氣壓力。**





**例題：若對流層頂高度$z_1$ = 11 km，壓力$P_1$ = 22.6 kPa，氣溫T = -56 ºC。求離地面高度20 km 處平流層之壓力與空氣密度？**

**解：溫度T = -56 °C = 217.15 °K**

氣壓

$$P=P_1\exp\left[-\frac{g(z-z_1)}{RT}\right]=22.6\cdot\exp\left[-\frac{9.81\cdot 9000}{287\cdot 217.15}\right]$$

$$P=5.48\ \text{kPa}=0.054\ \text{atm}_{,abs}$$

空氣密度

$$\rho=\frac{P}{RT}=0.088\ \text{kg/m}^3$$

亦即高度愈高，空氣愈稀薄。





## 2.3 壓力量測

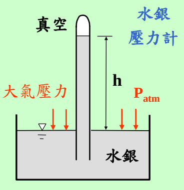
**壓力計(Manometer或Barometer)：量測壓力的儀器**

**水銀柱的高度與大氣壓力的關係為**

$P=\gamma_{Hg}\,h$

**其中γ為水銀的單位重。**

$$h=\frac{P}{\gamma_{Hg}}=\frac{101.3\,\text{kN/m}^2}{133\,\text{kN/m}^3}=762\ \text{mm}$$



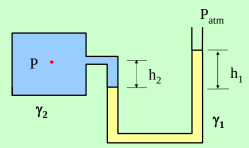

- **水銀的單位重為133 kN/m³，因此一標準大氣壓可換算成水銀柱高。**

**此種壓力為絕對壓力。**





## U型管壓力計(U-tube Manometer)

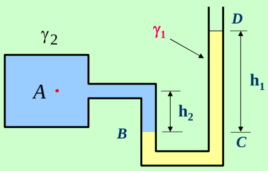



**U型管壓力計藉管中兩液面的高程差換算壓差，是一種簡單且常見之壓力量測設備。U型管右側與大氣接觸，左側與一密閉容器連接，密閉容器中之壓力以相對壓力表示：**

$$P=\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2$$

依據靜壓力方程式：

$$P_B = P_A + \gamma_2 h_2$$
$$P_c = P_{atm} + \gamma_1 h_1 \quad (P_D = P_{atm})$$
$$P_A = P_B - \gamma_2 h_2$$
$$= P_C - \gamma_2 h_2$$
$$= P_{atm} + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2$$
$$\boxed{P_A - P_{atm} = \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2}$$




若密閉容器內為氣體，其密度遠小於U型管中液體，故

$$P_A - P_{atm} \approx \gamma_1 h_1$$





斜管壓力計

增加量測微小壓力變化的精確度

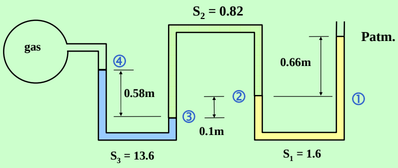
機械式壓力計

電子壓力計





例題：求圖中密閉容器中氣體的壓力？




解：依據靜壓力方程式，①點之壓力為

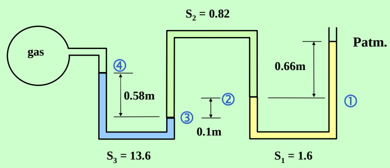
$$P_1 = 0.66\text{m} \times (9810 \times 1.6\ \text{N/m}^3) = 10360\ \text{N/m}^2{,}_{gage}$$

因為壓力 $P_1 = P_2$，可利用壓力$P_2$求得壓力$P_3$

$$P_3 = P_2 + \gamma_2 \times 0.1 = 10360 + 0.82 \times 9810 \times 0.1$$
$$= 11164\ \text{N/m}^2{,}_{gage}$$








而④點之壓力為：

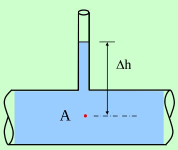
$$P_4 = P_3 + \gamma_3 \times (-0.58)$$
$$= 11164 - 13.6 \times 9810 \times 0.58\ \text{N/m}^2{,}_{gage}$$
$$= -66217\ \text{N/m}^2{,}_{gage}$$
$$= 35083\ \text{Pa}{,}_{abs}$$

亦即此密閉容器中之壓力低於大氣壓力。



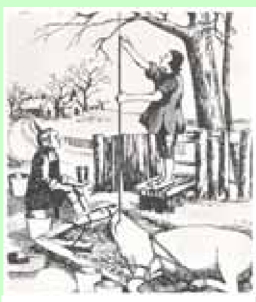


## 靜壓管(Piezometer)




若管流中流體為液體，測壓管中液面高程Δh，上端與大氣接觸，A點之壓力即為

$$P = \gamma\,\Delta h$$

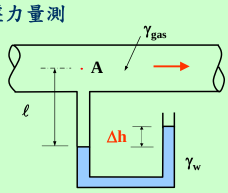


Stephen Hales, Year 1733





氣流管流之壓力量測



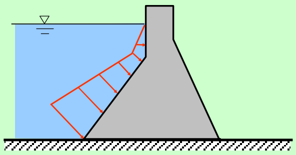

- 若管中流體為氣體，可以U型管來量測管中壓力：
  $P = \gamma_w \Delta h - \gamma_{gas} \ell$
- 管中液面高程差Δh，$\gamma_w$為U型管中流體的單位重，靜壓管一端與大氣接觸，A點之壓力即為：

$$P \approx \gamma_w \Delta h$$

13:49 C.R. Chu

## 2.4 平面上的靜壓總力

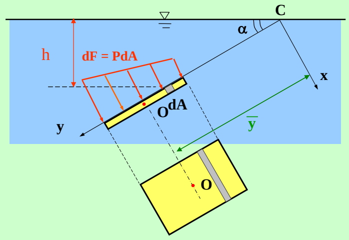
壩體受靜壓力之示意圖



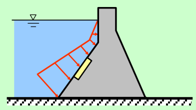
- 水利工程中經常遇到水面下物體受靜水壓力的問題，譬如水壩、堤防、閘門等水工結構物，在設計此類工程設施時，必須先瞭解其所受到之靜壓總力。



13:49 C.R. Chu




水面下平板受力之示意圖



- 平板與水面有一夾角 $\alpha$，平板之延伸線與水面交於C點
- 平板上有一條狀面積dA，因離水面的垂直距離為h，故作用在面積 dA 上的力為

$$dF = PdA = \gamma\cdot hdA = \gamma y\sin\alpha dA$$

其中y 為面積 dA 沿斜面至水面的距離。



13:49 C.R. Chu

因為水壓力會隨著水深而改變，故作用於此平板的總力必須以積分求得

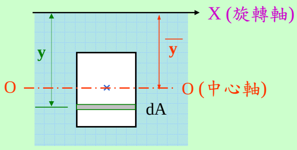
$$F=\int_A dF=\int_A \gamma y\sin\alpha dA \quad =\gamma\sin\alpha\int_A y dA$$

上式中積分項正好是平板面積對C 點(x 軸)的一次矩 (First moment)

$$\int_A y dA=\bar{y}\cdot A$$

$$\boxed{F=\gamma\cdot\bar{y}\cdot A\sin\alpha}$$

式中 $\bar{y}$ 為平板之形心(Centroid)至旋轉軸之距離。

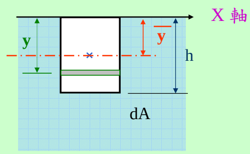





13:49 C.R. Chu

平板面積對 x 軸的一次矩(First moment)

$$\int_A y dA=\int_A y b dy = b\int_0^h y dy = b\frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{b\cdot h^2}{2} = bh\cdot\frac{h}{2} = A\cdot\bar{y}$$




式中 $\bar{y}$ 為平板之形心(Centroid)至旋轉軸之距離。

換言之，平板形心的位置為：

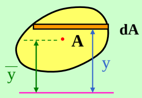
$$\bar{y}=\frac{1}{A}\int_A y dA$$



13:49 C.R. Chu

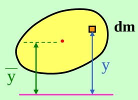
- 物體的形心(Centroid)位於物體形狀的中心：

$$\bar{y}=\frac{1}{\forall}\int_\forall y d\forall$$




- 平板的形心(Centroid)位於平板的中心：

$$\bar{y}=\frac{1}{\forall}\int_\forall y d\forall=\frac{1}{Ab}\int_A y b dA=\frac{1}{A}\int_A y dA$$




- 物體的質心(Center of Mass)或重心(Center of Gravity)位於物體質量的中心：

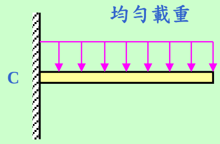
$$\bar{y}=\frac{1}{m}\int_\forall y dm=\frac{1}{\rho\forall}\int_\forall y\rho d\forall=\frac{1}{\forall}\int_\forall y d\forall$$

若物體的質量是均勻分佈，則質心位於形心所在之處。



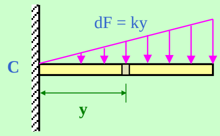
13:49 C.R. Chu

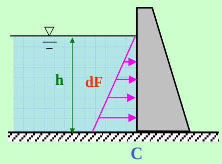
均勻載重




懸臂樑Canterlever

非均勻載重




力矩 $M=\int_A y dF=\int_A k y^2 dA$ 可簡化均勻載重之力矩的計算

慣性矩 $I_x=\int_A y^2 dA$ 可簡化線性變化載重力矩的計算

**對x 軸旋轉的慣性矩(Moment of inertia)：**

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_A\left[(y-\bar{y})+\bar{y}\right]^2 dA$$

$$=\left[\int_A (y-\bar{y})^2 dA+\int_A 2\bar{y}(y-\bar{y})dA+\int_A \bar{y}^2 dA\right]$$

$$I_o=\int_A (y-\bar{y})^2 dA$$

對中心軸的慣性矩

$$\int_A \bar{y}^2 dA=\bar{y}^2\int_A dA=\bar{y}^2 A$$

$$\int_A 2\bar{y}(y-\bar{y})dA=2\bar{y}\left[\int_A y\,dA-\bar{y}A\right]=0$$

因此對x 軸的慣性矩 $I_x=I_o+\bar{y}^2A$



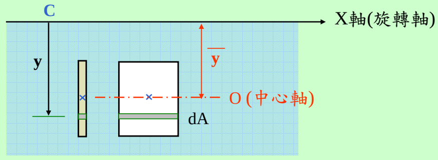


**平面的一次矩(First moment)：**

$$\int_A y\,dA=\bar{y}\cdot A \qquad [L^3]$$

**平面的二次矩(Second moment)：**

$$I_x=\int_A y^2 dA=I_o+\bar{y}^2A \qquad [L^4]$$

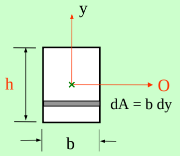






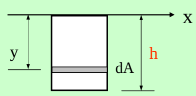

**矩形平板對中心軸旋轉的慣性矩：**

$$I_o=\int_A y^2 dA=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\,dy=b\frac{y^3}{3}\bigg|_{-h/2}^{h/2}=\frac{bh^3}{12}$$




**矩形平板對x軸旋轉的慣性矩：**

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2 b\,dy=b\frac{y^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{bh^3}{3}$$

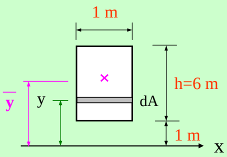



$$I_x=I_o+\bar{y}^2A=\frac{bh^3}{12}+\left(\frac{h}{2}\right)^2 bh=\frac{bh^3}{12}+\frac{bh^3}{4}=\frac{bh^3}{3}$$





**例題：一矩形平板寬度為b = 1 m，高度h = 6 m，試問形心和對x軸旋轉的慣性矩為何？**




**解：平板的形心位於**

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\int_A y\,dA=\frac{1}{A}\int_1^7 y\,b\,dy$$

$$=\frac{1}{bh}\left[b\frac{y^2}{2}\right]_1^7=\frac{1}{6}\frac{(7^2-1^2)}{2}=4\text{ m}$$

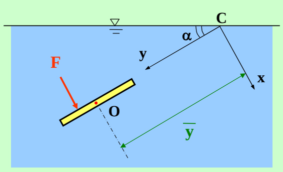
**平板對x軸旋轉的慣性矩：**

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_1^7 y^2 b\,dy=b\frac{y^3}{3}\bigg|_1^7=\frac{7^3-1^3}{3}=114\text{ m}^4$$

$$I_x=I_o+\bar{y}^2A=\frac{bh^3}{12}+\bar{y}^2\cdot bh=\frac{1\cdot 6^3}{12}+4^2\cdot 6=114\text{ m}^4$$







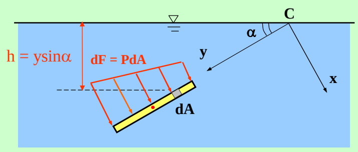

**靜壓總力為**

$$\boxed{F=\gamma\cdot\bar{y}\cdot A\sin\alpha}$$

因為此平板為矩形，平板的形心便在平板的中心，因此作用於平板上的總力等於形心處之壓力 $\gamma\cdot\bar{y}\cdot\sin\alpha$ 與平板面積A之乘積，方向垂直於平板表面。







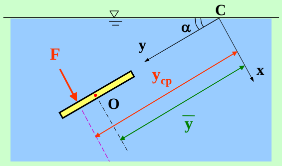

作用於平板上的靜壓力會形成一個力矩，使平板旋轉，此力矩可以積分求得：

$$M=\int_A y\,dF=\int_A \gamma\sin\alpha\, y^2 dA=\gamma\sin\alpha\int_A y^2 dA$$

式中y為面積dA對C點旋轉之力臂，積分項正好為平板面積對C點(x 軸)的二次矩(Second moment)或慣性矩(Moment of inertia)：

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_A\left[(y-\bar{y})+\bar{y}\right]^2 dA$$

13:49 C.R. Chu




將 $I_x = I_o + \bar{y}^2 A$ 代入力矩方程式可得：

$$M = F \cdot y_{cp} = \gamma \sin\alpha (I_o + \bar{y}^2 A)$$

$$F = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot \bar{y} \cdot A$$

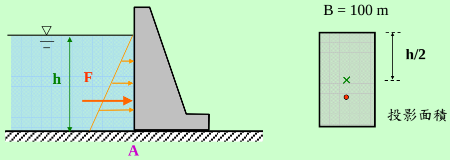
靜壓總力作用位置稱為壓力中心(Center of pressure)

$$\boxed{y_{cp} = \frac{M}{F} = \bar{y} + \frac{I_o}{\bar{y} \cdot A}}$$



13:49 C.R. Chu

例題：一堤防的寬度為B =100 m，水深為h = 6 m，受力面與水面垂直。試問靜水壓力對堤防所施之力及對壩趾A點之力矩為何？



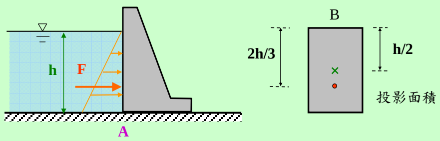

解：因堤防受力面與水面垂直，角度 $\alpha = 90^{o}$

靜壓總力

$$F = \gamma \sin\alpha \cdot \bar{y} \cdot A = \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot B \cdot h = \frac{\gamma}{2} B h^2$$



13:49 C.R. Chu




$$F = \frac{\gamma}{2} B h^2 = \frac{9810 \text{ N/m}^3}{2} \times 100 \text{ m} \times 6^2 \text{ m}^2 = 17660 \text{ kN}$$

壓力中心$y_{cp}$距水面之距離

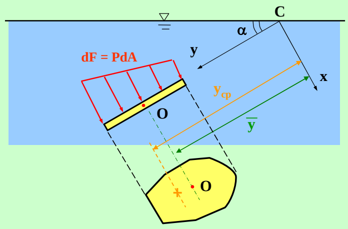
$$y_{cp} = \bar{y} + \frac{I}{\bar{y} \cdot A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{Bh^3}{12}}{\frac{h}{2} \cdot Bh} = \frac{2}{3} h = 4.0 \text{ m}$$

對壩趾（A點）之力矩為

$$M_A = (h - y_{cp}) \cdot F = 2 \text{ m} \cdot 17660 \text{ kN} = 35320 \text{ kN-m}$$



13:49 C.R. Chu



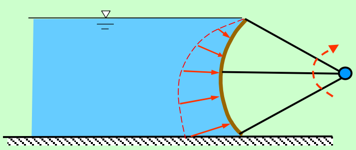

- 利用相同的方法可證明：水面下任意形狀之平板的靜壓總力仍為 $F = \gamma \bar{y} \sin\alpha A$

  靜壓總力作用位置（壓力中心）為 $y_{cp} = \bar{y} + \frac{I_o}{\bar{y} A}$



13:49 C.R. Chu

## 2.5 曲面上的靜壓總力

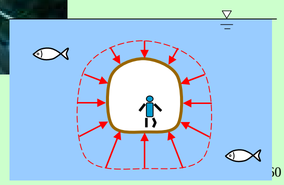




13:49 C.R. Chu

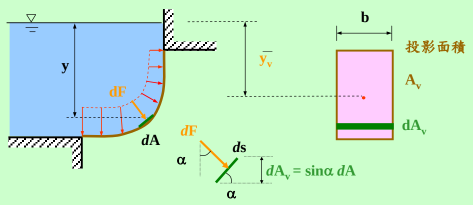
## 水族館的圓弧形水底隧道

屏東海生館



13:49 C.R. Chu

## 2.5 曲面上的靜壓總力



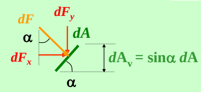

- 水面下有一塊曲面，寬度為b，靜壓力的大小和方向皆會隨著水深而改變。
- 若針對曲面上一塊小面積dA而言，因面積很小可視為一平面，此平面與水平成一夾角 $\alpha$ 。



13:49 C.R. Chu

- 作用於dA的水平力為

$$dF_x = \sin\alpha \cdot dF = \sin\alpha \cdot \gamma \cdot y \cdot dA$$




- 作用於曲面上之靜壓總力的水平分量為

$$F_x = \int_A dF_x = \int_A \gamma \cdot y \sin\alpha\, dA = \gamma \cdot \int_A y \sin\alpha\, dA$$

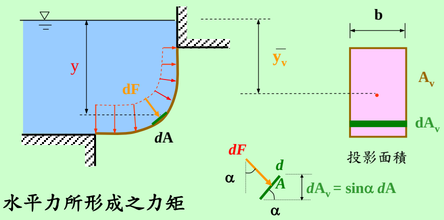
- 式中sinα dA 為面積dA在垂直面上的投影面積，因此作用於曲面上的水平總力類似平面之受力

$$F_x = \gamma \int_A y\, dA_v = \gamma \cdot \bar{y}_v \cdot A_v$$

- 其中$A_v$為曲面在垂直面上的投影面積，$\bar{y}_v$ 為投影面積之形心在水面下的位置。



13:49 C.R. Chu




- 水平力所形成之力矩

$$M_o = \int y\, dF_x = \int_A \gamma \cdot y^2 \sin\alpha \cdot dA = \int_{A_v} \gamma \cdot y^2 \cdot dA_v$$

- 可用與平板相同的方法推導得水平力在曲面上的作用位置

$$y_{cp} = \bar{y}_v + \frac{I_v}{\bar{y}_v \cdot A_v}$$

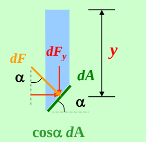
- 式中$I_v$ 為投影面積$A_v$ 繞其中心軸旋轉之慣性矩。



13:49 C.R. Chu

作用於dA的垂向力為：

$$dF_y = \cos\alpha \cdot dF \quad = \cos\alpha \cdot \gamma \cdot y \cdot dA$$




作用於曲面上之靜壓總力的垂直分量：

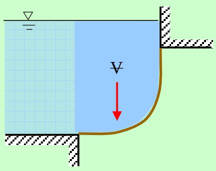
$$F_y = \int_A dF_y = \int_A \gamma \cdot y \cos\alpha\, dA = \gamma \cdot \int_A y \cos\alpha\, dA$$

式中 y cosα dA為在面積dA之上的水體體積，因此作用於曲面上的垂直總力：

$$F_y = \gamma \int_A y \cos\alpha\, dA = \gamma \cdot \mathcal{V}$$



13:49 C.R. Chu




- 作用於曲面上之垂向力等於曲面以上水體之重量 $F_y = \gamma \mathcal{V}$

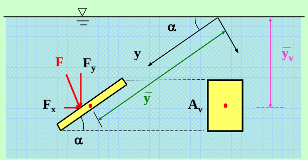
其中 $\mathcal{V}$ 為曲面以上水體之體積，垂向力在曲面上的作用位置為體積 $\mathcal{V}$ 之形心位置。

- 而靜壓總力的合力為 $F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$



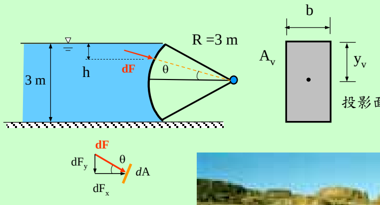
13:49 C.R. Chu

## 由曲面受力的公式求作用於平面上的靜壓總力




- 作用在平板上的水平力 $F_x = \gamma \cdot \bar{y}_v \cdot A_v$ 曲面的公式
- $A_v$為平板在垂直面上的投影面積，$A_v = A \sin\alpha$ ，形心位置 $\bar{y}_v = \bar{y} \cdot \sin\alpha$ 。
- 水平力與總力的關係 $F \cdot \sin\alpha = \gamma \cdot (\bar{y} \cdot \sin\alpha) \cdot (A \cdot \sin\alpha)$
- 因此平板所受之靜壓總力 $F = \gamma \cdot \bar{y} \cdot A \cdot \sin\alpha$ 平面的公式

**例題：** 洩水閘門常設計成圓弧形以便於開關，求洩水閘門單位寬度所受之水平力和垂向力？








**解：** 將閘門上一塊小面積可視為一平面，R為閘門旋轉半徑，b為閘門寬度，作用於此平面上的靜壓力為

$$dF = \gamma \cdot h \cdot dA$$

此作用力與水平成一夾角θ，範圍由-30º ~ 30º，而水深為

$$h = 1.5 - R \cdot \sin\theta$$

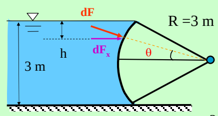
水平力 $dF_x = \cos\theta\, dF$，整理可得

$$F_x = \int \cos\theta\, dF = \int_{-30}^{30} \gamma \cdot (1.5 - R\sin\theta)\cos\theta \cdot dA \qquad dA = b \cdot R \cdot d\theta$$

$$F_x = \gamma \cdot b \cdot R \int_{-30}^{30} (1.5 - R\sin\theta)\cos\theta \cdot d\theta$$

積分可得單位寬度的水平力

$$\frac{F_x}{b} = 44.1\ \mathrm{kN/m}$$







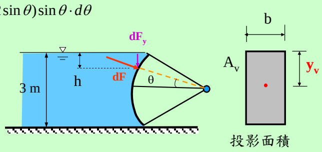

垂向力

$$F_y = \int -\sin\theta\, dF = \int_{-30}^{30} -\sin\theta \cdot \gamma \cdot (1.5 - R\sin\theta) \cdot dA \qquad dA = b \cdot R \cdot d\theta$$

$$F_y = -\gamma \cdot b \cdot R \int_{-30}^{30} (1.5 - R\sin\theta)\sin\theta \cdot d\theta$$

單位寬度的垂向力

$$\frac{F_y}{b} = 8.0\ kN/m$$




亦可由投影面積的方式來求得流體作用力，圓弧在垂直面上的投影面積為一矩形平面，故單位寬度所受的水平力為

$$F_x = \gamma \cdot \bar{y}_v \cdot h \cdot b = 9810\ \mathrm{N/m^3} \cdot 1.5m \cdot 3m \cdot b$$

$$\frac{F_x}{b} = 44.1\ \mathrm{kN/m}$$





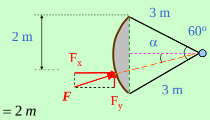
垂向力等於圓弧所排開之水體的重量(下圖中灰色部份）

$$F_y = \gamma \cdot \forall = 9810 \cdot \left(\frac{60}{360}\pi \cdot R^2 - \frac{1}{2}R^2\cos 30^o\right) \cdot b$$

$$\frac{F_y}{b} = 8.0\ kN/m$$

作用點在水面下

$$y_{cp} = \bar{y}_v + \frac{I_v}{\bar{y}_v \cdot A_v} = \frac{h}{2} + \frac{b \cdot h^3/12}{(h/2) \cdot bh} = \frac{2h}{3} = 2\ m$$

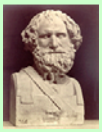



兩種不同的方法皆可求得流體作用力。但值得注意：因為作用於圓弧上的靜壓力皆垂直於圓弧，故靜壓總力通過圓弧之圓心(洩水閘門的旋轉軸)。

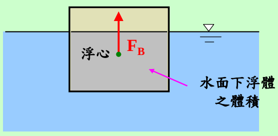




## 2.6 浮力(Buoyancy)



287-212 B.C.




- 阿基米德(Archimedes)原理：

  $$F_B = \gamma \times \forall$$

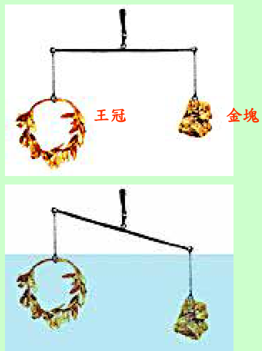
- 浮力等於流體單位重乘上物體所排開流體之體積。
- 浮力的方向垂直向上，且浮力作用之位置(浮心)位於水面下浮體體積的形心。

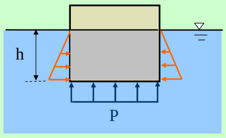




## 阿基米德原理(Archimedes's Principle)

希臘國王懷疑金匠將王冠中摻雜其他金屬，要阿基米德設法辨別王冠的成分。阿基米德開始也想不出辨別的方法，有一天，他正在浴室中洗澡時，感覺到水的浮力，讓他想到水中的物體會減輕重量，不同密度(體積)的物體所減輕重量(排開的流體)不一樣，因此可以設法測出王冠的成分。





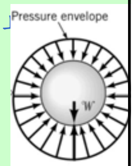

物體所受之浮力來自於靜水壓力，譬如一個矩形物體，作用於物體兩側之靜水壓力因為對稱，互相抵消。物體底部之靜水壓力：

$$F_B = P \times A = \gamma\, h \times A$$

式中h為物體沈在水中的深度，A為底部之面積，向上總力等於浮力：

$$F_B = \gamma \cdot \forall$$

若是不規則形狀的浮體，或是完全沈於水中的沈體(Submerged body)亦可用得到阿基米德原理。






例題：若一熱汽球的體積為2000 m³，汽球內氣體壓力為120 kPa，溫度為100℃。汽球外大氣壓力為100 kPa，溫度為10℃。試計算其載重能力？





解：查附錄A之表可得空氣的氣體常數$R_{air}$ = 287 J/kg /$^0$K，依據氣體的狀態方程式，熱汽球內空氣的密度為：

$$\rho_{in} = \frac{120 \times 10^3}{287 \times (273+100)} = 1.120 \text{ kg/m}^3$$

汽球外空氣的密度為：

$$\rho_{out} = \frac{100 \times 10^3}{287 \times (273+10)} = 1.231 \text{ kg/m}^3$$

載重 = 浮力 - 汽球內氣體的重量，因此

$$Mg = \rho_{out} g \forall - \rho_{in} g \forall$$

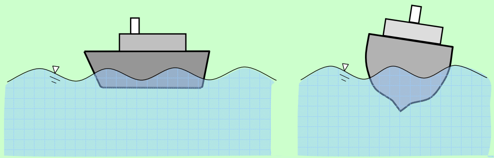
M = 1.231x2000 - 1.120x2000 = 220 kg

故此熱汽球可負載之質量**M = 220 kg**





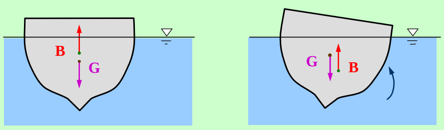
## 2.7 浮體穩定度



浮於水中的物體，譬如航行於水面之船隻，其穩定性(Stability)是一個非常重要問題，穩定性不佳的船隻容易搖晃、翻覆。





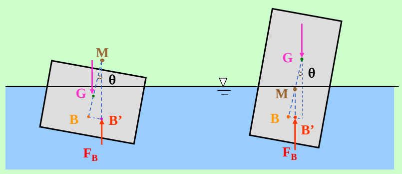



- 浮於水面的物體其所受之浮力必定與重力大小相等，但方向相反。
- 船之重心(Center of Gravity)位於全船的重量中心，浮心(Center of Buoyancy)則位於船在水面下體積的形心。
- 浮體重心G與浮心B的位置，是直接影響浮體穩定度的重要因素。
- 若重心與浮心不在同一鉛垂線上，浮力與重力會形成一力偶，會造成浮體搖晃甚至傾覆的現象。



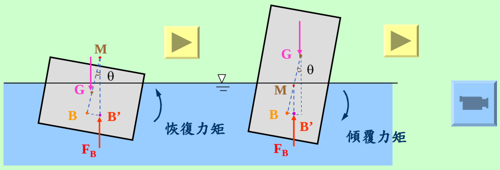


(a) 穩定　　(b) 不穩定




- 假設一矩形浮體受外力後，向右傾斜一角度，如圖所示。
- 水面下體積的改變會造成浮心位置由原來位置B移動至B'，原鉛垂線BG與新鉛垂線交會於一點M，此點稱為定傾中心(Meta-center)。
- 浮體是否穩定取決於定傾中心的位置，而定傾中心的位置與浮體重心到浮心的距離有關。

(a) 穩定　　　(b) 不穩定



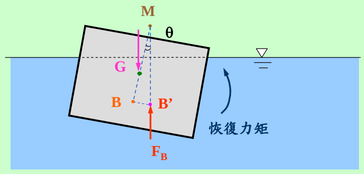

- 若定傾中心M和重心G相疊合，則此物體為中性(Neutral)平衡。
- 若船的重心過高，在風浪中搖擺時，重心很容易偏離原來的位置而產生使船傾覆的力矩。因此為使船在大海中能穩定航行，通常要儘可能壓低船的重心，例如在船底加裝鉛製龍骨，或在船底艙裝置貨物，以降低重心。





## 穩定(Stable)

當定傾中心M在重心G的上方時，浮力所形成之恢復力矩會繞重心G逆時鐘旋轉，會使浮體恢復至原來的水平位置，此狀況稱為穩定平衡。

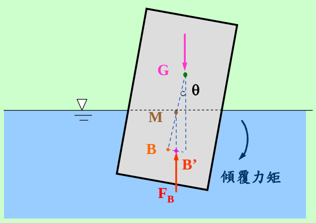







## 不穩定(Unstable)

若浮體的重心較高，定傾中心M在重心G之下，浮力所形成之力矩會繞重心G順時鐘旋轉，會使得浮體繼續傾斜，直到整個浮體翻覆，這種情形便屬於不穩定平衡。








## 本章重點

靜壓方程式

$$\frac{dP}{dz} = -\gamma$$

均質流體的靜壓方程式

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \text{定值}$$

水面下任意形狀之平板的靜壓總力為

$$F = \gamma \bar{y} \sin\alpha A$$

靜壓總力作用位置（壓力中心）為 $y_{cp} = \bar{y} + \frac{I_o}{\bar{y} A}$

浮力為 $F_B = \gamma \cdot \forall$





## 第二章結束

## Any Questions？

**Suggested exercises:**

2.8, 2.12, 2.24, 2.33