

第五章 理想流(Ideal flow)



國立中央大學土木系
朱佳仁 教授

5 - 1

本章重點

- 運動流體中的壓力變化
- 伯努利方程式
- 伯努利方程式的應用
- 穴蝕現象
- 渦流

5 - 2

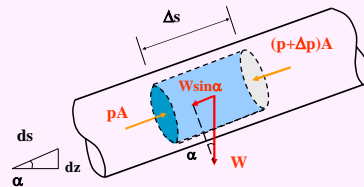
理想流(Ideal flow)

真實的流場往往十分複雜，為簡化流場之計算起見，可假設流體的黏滯性可予以忽略，且流場為不可壓縮流場，此種流場便稱為理想流。

採用理想流的假設，流場的分析與計算較為容易，所求得之近似解可幫助我們瞭解流體運動時所發生的現象。

5 - 3

5.1 運動流體中的壓力變化



S方向的受力： $P \cdot A - (P + \Delta P)A - W \sin \alpha = m a_s$

$$\sin \alpha = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{dz}{ds}$$

5 - 4

$$P \cdot A - (P + \Delta P)A - W \sin \alpha = m a_s$$

流體本身的重量為：

$$W = \gamma \cdot (A \cdot \Delta s)$$

利用泰勒展開式(Taylor's expansion):

$$P(s + \Delta s) = P(s) + \Delta s \frac{dP}{ds} + \frac{(\Delta s)^2}{2} \frac{d^2P}{ds^2} + \dots + \frac{(\Delta s)^n}{n!} \frac{d^n P}{ds^n}$$

$$P(s + \Delta s) \approx P(s) + \Delta s \frac{dP}{ds} \\ = P(s) + \Delta P$$

代入可得：

$$-\frac{\Delta P}{\Delta s} - \gamma \frac{\Delta z}{\Delta s} = \rho a_s$$

5 - 5

尤拉流體運動方程式(Euler's equation)

$$-\frac{d}{ds}(P + \gamma z) = \rho a_s$$

- 此式描述流體在運動時壓力的變化。
- 由尤拉方程式可看出：
 - (1) 流體會沿著高壓至低壓（負壓力梯度）的方向運動；
 - (2) 流體會由高處往低處流動。



Leonhard Euler
1707-1783

5 - 6

C.R. Chu

$P_1 \text{大}$ $P_2 \text{小}$
 x_1 x_2 x

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} < 0$$

5 - 7

C.R. Chu

$z_1 \text{大}$ $z_2 \text{小}$
 x_1 x_2 x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} < 0$$

5 - 8

C.R. Chu

在加速下之水箱

靜止時

加速下

5 - 9

C.R. Chu

在加速下之水箱

L b
 h_1 h_2

尤拉方程式：

1. 沿著水面方向(s 方向)
2. 沿著水箱底部之水平方向(x 方向)
3. 沿著垂直方向(z 方向)

5 - 10

C.R. Chu

$\sin \theta = -\frac{dz}{ds}$

因為z向上為正，向下為負。s向右下方，故dz/ds < 0。

(1) 沿著水面方向(s 方向)：

$$-\frac{dP}{ds} - \gamma \frac{dz}{ds} = \rho a_x \quad \text{加速度：} a_s = a_x \cos \theta$$

水面的壓力等於大氣壓力： $P = P_{atm} = 0$

代入可得： $-\rho g \frac{dz}{ds} = \rho a_x \cos \theta$ $g \sin \theta = a_x \cos \theta$

水面傾斜的角度： $\tan \theta = \frac{a_x}{g}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{a_x}{g}$

5 - 11

C.R. Chu

(2) 沿著水箱底部之水平方向(x 方向)：

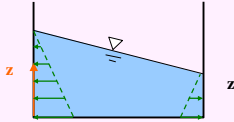
$$-\frac{d}{dx}(P + \gamma z) = \rho a_x$$

■ 沿著x方向， $-\frac{dP}{dx} = \rho a_x$ 壓力變化成線性遞減

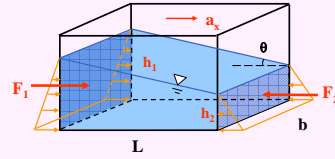
負號表示隨著x的增加，壓力P減小。

5 - 12

(3) 沿著垂直方向 (z 方向): $-\frac{d}{dz}(P + \gamma z) = \rho a_z$



- 垂直方向之加速度 $a_z = 0$, 故 $\frac{P}{\gamma} + z = \text{定值}$
- 因為垂直方向除重力外, 無其他加速度, 故壓力變化和靜水壓力一樣。



水箱兩側的靜壓總力與流體加速度形成力平衡:

$$\gamma \frac{h_1}{2} h_1 b - \gamma \frac{h_2}{2} h_2 b = m a_x$$

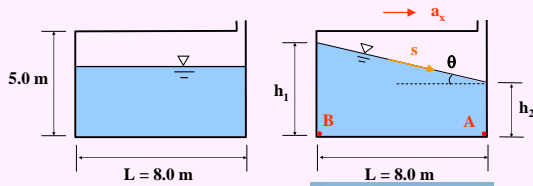
水箱內流體質量: $m = \rho \cdot \left[\frac{1}{2} (h_1 + h_2) L b \right]$

$$\Rightarrow \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{a_x}{g} \quad \Rightarrow \tan \theta = \frac{a_x}{g}$$

此結果與尤拉方程式所得之結果相同。



例題: 一個矩形的儲油槽, 長度 8 m, 高度 5 m, 內裝有深度為 4.4 m 的汽油 (比重為 0.80), 液面與大氣接觸。在地震來襲時, 水平方向之瞬間加速度 1.2 m/s^2 , 求油槽中最大壓力為何?

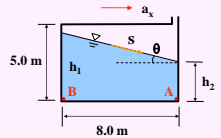


解: 利用尤拉方程式可得液面傾斜的角度, 亦即

$$\tan \theta = \frac{a_x}{g} \quad \frac{h_1 - h_2}{8.0} = \frac{1.2}{9.81}$$

而流體體積不變:

$$\left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \cdot 8 \cdot b = 4.4 \cdot 8 \cdot b$$



式中 b 為油槽寬度, 求解可得 $h_1 = 4.89 \text{ m}$, $h_2 = 3.91 \text{ m}$ 。

因為液面之壓力等於大氣壓力, $P = P_{\text{atm}} = 0_{\text{gage}}$, 最大壓力應該位於油槽底部。

$$\text{A 點之壓力 } P_A = \gamma_{\text{oil}} \cdot z = 9810 \times 0.8 \times 3.91 = 30.69 \text{ kPa}_{\text{gage}}$$

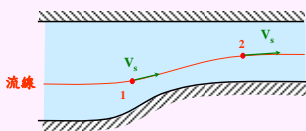
$$\text{B 點之壓力 } P_B = \gamma_{\text{oil}} \cdot z = 9810 \times 0.8 \times 4.89 = 38.38 \text{ kPa}_{\text{gage}}$$

B 點之壓力即為油槽中最大壓力。



5.2 伯努利方程式

伯努利 (Daniel Bernoulli, 1700 - 1782)



在穩態、不可壓縮、無黏性的流場中, 流體沿著一條流線 s 流動, 流速為 V_s , 沿著此條流線的加速度為

$$a_s = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}$$



因流場為穩態流, 時變加速度為零, 加速度變為:

$$a_s = V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V_s^2}{2} \right)$$

沿著此條流線的加速度必須遵守尤拉方程式:

$$-\frac{\partial}{\partial s} (P + \gamma z) = \rho a_s$$

代入可得:

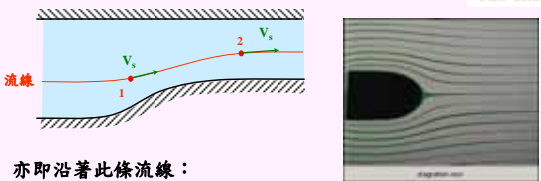
$$-\frac{\partial}{\partial s} (P + \gamma z) = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V_s^2}{2} \right)$$

因為流場為不可壓縮流場, 密度為定值, 上式變為:

$$\frac{\partial}{\partial s} (P + \gamma z + \frac{\rho V_s^2}{2}) = 0$$



C.R. Chu



亦即沿著此條流線：

$$P + \gamma z + \frac{\rho V_s^2}{2} = \text{定值}$$

或可表示為：

$$\frac{P}{\gamma} + z + \frac{V_s^2}{2g} = H$$

沿著流線，能量守恆。


$\frac{P}{\gamma}$ 為壓力水頭(壓力能)
 z 為高程水頭(位能)
 $\frac{V_s^2}{2g}$ 為速度水頭(動能)
 H 為總水頭(總能量)

因次皆為長度[L]

5 - 19

C.R. Chu

Head 水頭

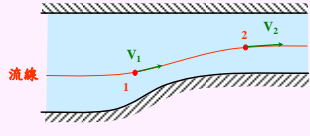


單位重量流體所含之能量，因次為[L]。

$$\frac{\text{Energy}}{\text{Weight}} = \frac{\text{Force} \cdot \text{Distance}}{\text{Weight}} = \left[\frac{F \cdot L}{F} \right] = [L]$$

5 - 20

C.R. Chu



■ 一條流線上的任意兩點，總能量必須守恆：

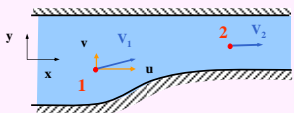
$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

■ 此方程式稱為伯努利方程式(Bernoulli's eqn.)，適用於穩態流、無黏性、不可壓縮流場。

5 - 21

C.R. Chu

若流場為穩態、無黏性、不可壓縮及無旋流，伯努利方程式可適用於流場中的任意兩點，不受限於在同一條流線上的兩點。譬如流體流經一束縮段，總速度為

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$


因流場為穩態流，時變加速度為零，x和y方向之加速度可寫成：

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

5 - 22

C.R. Chu

因為流場為無旋流：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

代入水平向和垂直向加速度：

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x}$$

$$a_y = u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial y}$$

依據尤拉方程式：

$$-\frac{\partial}{\partial x} (P + \gamma z) = \rho a_x = \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} (P + \gamma z) = \rho a_y = \frac{\rho}{2} \frac{\partial V^2}{\partial y}$$

5 - 23

C.R. Chu

因為不可壓縮流場之密度為定值，故可得

$$\frac{\partial}{\partial x} (P + \gamma z + \frac{\rho V^2}{2}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (P + \gamma z + \frac{\rho V^2}{2}) = 0$$

表示括號中之項不隨位置而變，亦即

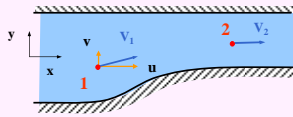
$$P + \gamma z + \frac{\rho V^2}{2} = f(x, y, t)$$

換言之，在穩態、無黏性、不可壓縮及無旋流場中，伯努利方程式可適用於流場中任意兩點：

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

5 - 24

若流場為穩態、無黏性、不可壓縮及無旋流，伯努利方程式可適用於流場中的任意兩點，不受限於在同一條流線上的兩點。



$$P + \gamma z + \frac{\rho V^2}{2} = f(x, y, t) = \text{定值}$$

$$\frac{P}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$\frac{P}{\gamma}$ 為壓力水頭

z 為高程水頭

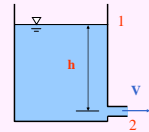
$\frac{V^2}{2g}$ 為速度水頭

H 為總水頭

因次皆為長度[L]



例題：一個水箱內水深為 $h = 1 \text{ m}$ ，利用伯努利方程式求出水口之流速？



解：伯努利方程式

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

水面 (1點) 與排水口處 (2點) 水體所受之壓力皆等於大氣壓力 $P_1 = P_2 = 0_{\text{gauge}}$

當水箱很大時，水面處之流速極小，可予以忽略 $V_1 \approx 0$

$$z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

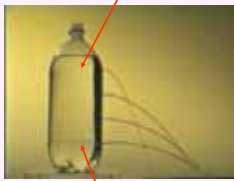
故可得排水口流速 $V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{2gh} = 4.43 \text{ m/s}$



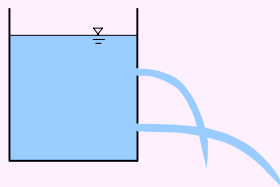
水箱壁之射流

$$V = \sqrt{2gh}$$

流速小

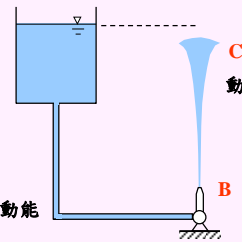


流速大



噴泉(Fountain)

位置高
流速小



動能轉換成位能

位能轉換成動能

位置低
流速大

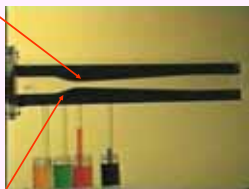
若流場為理想流，C點的高度和A點的高度相同

但因為管內阻力和空氣阻力，C點的高度和低於A點



文氏管(Venturi tube)

斷面小
流速大
壓力小

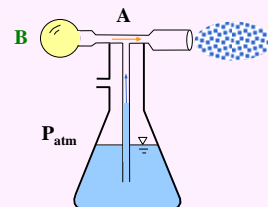


斷面大
流速小
壓力大

影片



噴霧器(Sprayer)



擠壓B點，氣流加速通過A點，造成A點壓力變小，將瓶中液體吸上來，隨氣流一起噴出。



C.R. Chu

虹吸管(Siphon)

流速大，
壓力小

壓力低於大氣壓，
故能將水吸起

重力使流體由高處
流至低處

5 - 31

C.R. Chu

例題：利用虹吸管將水箱中的水排出，求虹吸管最高點之壓力？

EL. 1.6 m

2 EL. 2.0 m

1

3 EL. 1.0 m

解答

5 - 32

C.R. Chu

解：伯努利方程式 $\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{V_3^2}{2g}$

1點（水面）與3點（排水口處）水體所受之壓力皆等於大氣壓力， $P_1 = P_3 = 0_{\text{gage}}$ 。當水箱很大時，水面流速 $V_1 \approx 0$ 。

$$\frac{V_3^2}{2g} = z_1 - z_3 = 0.6 \text{ m} \quad \text{流速 } V_3 = 3.43 \text{ m/s}$$

又 $\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$ 整理可得

$$\frac{P_2}{\gamma} = (z_1 - z_2) - \frac{V_2^2}{2g} = -0.4 - \frac{V_3^2}{2g}$$

且因為管徑不變，故管流流速 $V_2 = V_3$ 。

壓力 $P_2 = 9810 \text{ N/m}^3 \times (-0.4 - 0.6) \text{ m} = -9810 \text{ N/m}^2_{\text{gage}}$

亦即最高點之壓力低於大氣壓力 9810 N/m^2 。

5 - 33

C.R. Chu

機翼(Airfoil)

V大, P小

V小, P大

- 機翼上方的流速會大於下方之流速，此速度差異所導致機翼上下的壓力差形成飛機飛行時所需要的升力。

5 - 34

C.R. Chu

機翼(Airfoil)

5 - 35

C.R. Chu

旋轉球(Spinning ball)

V小, P大

逆時鐘旋轉

V大, P小

下墜球

V大, P小

順時鐘旋轉

V小, P大

上飄球

此現象亦稱之為馬格努斯(Magnus)效應。

5 - 36

C.R. Chu

旋轉球

Higher air pressure

Lower air pressure

逆時鐘旋轉

下墜球

5 - 38

C.R. Chu

乒乓球與漏斗

將一個乒乓球放在漏斗的下方，由漏斗細管處吹氣，乒乓球不會掉下，為什麼？

V大, P小

乒乓球

5 - 38

C.R. Chu

影片

V大, P小

流速大 壓力小

為什麼球不會偏離氣流？

5 - 39

C.R. Chu

滯流管 (Stagnation tube)

- 滯流管為一個L形管，管前端有一開口小孔，流速 $V_2 = 0$ ，稱為滯流點 (Stagnation point)。
- 高程相同， $z_1 = z_2$ ，故可得 $\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma}$
- 壓差等於滯流管內水位高：

$$\frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} = (h+d) - d$$

$$\text{流速 } V_1 = \sqrt{2gh}$$

- 滯流管若配合U型管壓力計可量測氣流之流速。

5 - 40

C.R. Chu

皮托管 (Pitot Tube)

皮托管為法國科學家皮托 (Pitot, 1695 - 1771) 所發明，皮托管是由內外兩管所組合而成，其內管與滯流管相同，但外管的管壁有小孔連通到一個側管。

5 - 41

C.R. Chu

皮托管 (Pitot Tube)

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

皮托管的基本假設為：

- 皮托管前端為滯流點，流速為零， $V_2 = 0$ 。
- 流場不受皮托管的存在而受到干擾，故壓力 $P_1 = P_3$ 。
- 皮托管前端2點之壓力包含速度水頭及壓力水頭，而3點之壓力僅為壓力水頭，故 P_2 大於 P_3 。
- 1點之高程與2點之高程相同， $z_1 = z_2$ 。

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma}$$

5 - 42

C.R. Chu

皮托管 (Pitot Tube)

皮托管量測配合壓差計便可量測流速
飛機便是以皮托管量測其飛行速度

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma_a} = \frac{\gamma_w \Delta h}{\gamma_a}$$

$$\text{流速 } V_1 = \sqrt{2g \frac{\gamma_w \Delta h}{\gamma_a}}$$

影片

5 - 43

C.R. Chu

5.4 穴蝕現象 (Cavitation)

- 當水流中流速過大時，壓力會變小，當壓力小於水的蒸氣壓時，水便開始汽化，水中會產生許多小氣泡。

- 這些氣泡在高速的水中流動，會撞擊水管管壁或渦輪機的扇葉，造成這些設施的損壞，此現象稱為穴蝕現象。

5 - 44

C.R. Chu

穴蝕現象 (Cavitation)

- 工程上通常不希望穴蝕現象發生，因此要求流場之壓力不得小於水的蒸氣壓。

5 - 45

C.R. Chu

例題：當流體通過一束縮管時。若管徑 $D = 0.4 \text{ m}$ ， $d = 0.1 \text{ m}$ ，壓力計顯示 $P_1 = 100 \text{ kPa}_{\text{gage}}$ 。在水溫 10°C 下，若不希望穴蝕現象發生，流量不得大於多少？

斷面縮小，流速增大，壓力變小，
穴蝕現象便會發生，因此要求流量不得過大。

5 - 46

C.R. Chu

解：管中心線高程 $z_1 = z_2$ ，故伯努利方程式

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

依據連續方程式 $V_1 A_1 = V_2 A_2$ ，整理可得

$$P_2 = P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} \left[1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right]$$

截面積比

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi d^2 / 4} = \frac{0.4^2}{0.1^2} = 16$$

水溫 10°C 時，水之蒸氣壓 $P_v = 1.23 \text{ kN/m}^2_{\text{abs}}$ 。當管中壓力小於或等於水之蒸氣壓， $P_2 < P_v$ ，穴蝕現象便會發生。代入 $P_1 = 100 \text{ kPa}_{\text{gage}} = 201 \text{ kPa}_{\text{abs}}$ ，可得

5 - 47

C.R. Chu

$$1.23 \times 10^3 = 201 \times 10^3 + \frac{1000 V_1^2}{2} [1 - (16)^2]$$

可得故穴蝕現象會發生的臨界流速 $V_1 = 1.25 \text{ m/s}$
流速 $V_2 = 20.0 \text{ m/s}$

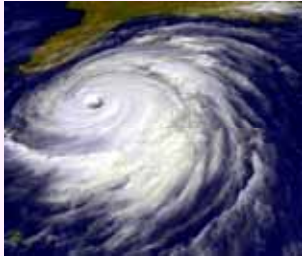
亦即最大流量不得超過 $Q = V_1 \pi / 4 D^2 = 0.157 \text{ m}^3/\text{s}$

當流量 Q 上升，流速 V_2 便會上升，束縮處之壓力 P_2 便會下降，穴蝕現象便會發生。

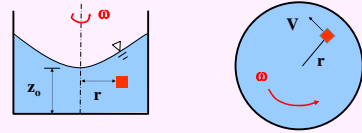
5 - 48

5.6 渦流(Vortex)

強制渦流(Forced Vortex)
自由渦流(Free Vortex)



5.6.1 強制渦流(Forced Vortex)



- 當流體受外加扭矩而旋轉時，即為強制渦流。譬如攪拌器、洗衣機、風扇所產生的渦流。

強制渦流(Forced Vortex)



影片

水箱中任一塊流體沿著切線方向的速度為

$$V(r) = r\omega$$

此塊流體所受之向心加速度

$$a_r = -\frac{V^2}{r} = -\frac{r^2\omega^2}{r} = -r\omega^2$$

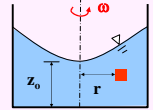
代入尤拉方程式

$$-\frac{d}{dr}(P + \gamma z) = -\rho r\omega^2$$

積分可得

$$\frac{P}{\gamma} + z = \frac{1}{2g}r^2\omega^2 + C_1$$

C_1 為積分常數。由中心點($r=0$)水面高程 z_0 ，可得 $C_1 = z_0$



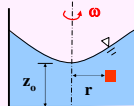
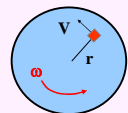
在水面下壓力變化為

$$P(r, z) = \frac{1}{2}\rho r^2\omega^2 + \gamma(z_0 - z)$$

沿著半徑方向水深的變化為

$$z(r) = z_0 + \frac{r^2\omega^2}{2g}$$

亦即水面之曲面為一拋物面。

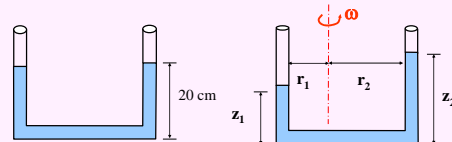


強制渦流中，流體質點會對其自軸旋轉，渦度不為零，流況為旋流(Rotational flow)。

因此嚴格而言，伯努利方程式不適用在強制渦流中。

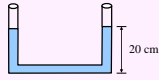
例題：一U形管繞著一不對稱軸旋轉，半徑分別為

$r_1 = 10 \text{ cm}$ ， $r_2 = 15 \text{ cm}$ ，角速度 $\omega = 12 \text{ rad/s}$ 。旋轉前兩邊水位皆為 20 cm ，問旋轉後水位 z_1 ， $z_2 = ?$



解：U形管中水體之質量、體積不會因旋轉而改變

$$(z_1 + z_2) \cdot A = 20 \cdot 2 \cdot A$$



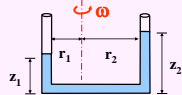
式中A為U型管之截面積，因此 $(z_1 + z_2) = 40 \text{ cm}$ 。

旋轉後，水面之高程遵守由尤拉方程式所描述之拋物面

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 - \frac{r_2^2 \omega^2}{2g}$$

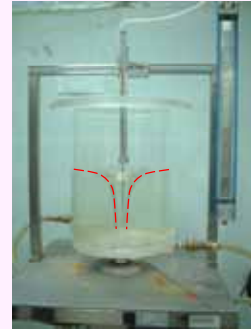
水面上，壓力 $P_1 = P_2 = P_{\text{atm}} = 0$, gage，故

$$z_1 - z_2 = \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_2^2) = -9.2 \text{ cm}$$



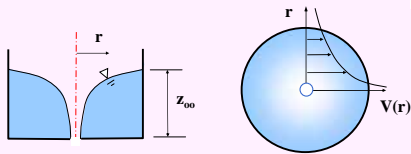
因此可得 $z_1 = 15.4 \text{ cm}$ ， $z_2 = 24.6 \text{ cm}$ 。

自由渦流(Free Vortex)



浴缸底部排水口所產生的渦流便是自由渦流。

影片

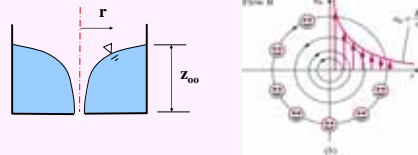


- 自由渦流中流體的運動並無外加扭力，因此流體的角動量守恆，亦即 $\frac{d}{dt}(mrV) = 0$

流速 $V(r) = \frac{\Gamma}{r}$

式中 Γ 為積分常數，代表自由渦流的強度，因次為 $[L^2/T]$ 。在穩態之渦流中， Γ 可視為定值。

由上式可看出：離中心愈遠，流速愈小。



流體所受之向心加速度 $a_r = -\frac{V^2}{r} = -\frac{\Gamma^2}{r^3}$

代入尤拉方程式 $-\frac{d}{dr}(P + \gamma z) = -\rho \frac{\Gamma^2}{r^3}$

積分可得渦流中壓力變化 $\frac{P(r, z)}{\gamma} = (z_\infty - z) - \frac{1}{2g} \frac{\Gamma^2}{r^2}$

z_∞ 為離中心極遠處水面高程

水面剖面為 $z(r) = z_\infty - \frac{1}{2g} \frac{\Gamma^2}{r^2}$

Summary

Euler's Equation

$$-\frac{d}{ds}(P + \gamma z) = \rho a_s$$

Bernoulli's Equation

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

Forced Vortex and Free Vortex

第五章結束

Any Questions?



Suggested exercises:

5.1, 5.8, 5.12, 5.25, 5.31